

Europ. J. Combinatorics (1997) **18**, 117–124



Une Bijection Explicative de Plusieurs Propriétés Remarquables des Ponts

J. VAILLÉ

We establish a bijection between ‘bridges’ (or words of Dyck language) that explains some of their combinatorial properties.

© 1997 Academic Press Limited

1. INTRODUCTION

1.1. Dans l'article [1], Kreweras étudie systématiquement les propriétés des ponts et établit notamment, par des dénombrements appropriés, les trois propriétés suivantes, valables pour les ponts de portée n :

(α) les ponts ayant α arches sont aussi nombreux que les ponts commençant par α
 εταπεσ ασψενδαντεσς
 étapes ascendantes;

(β) les ponts ayant β paliers sont aussi nombreux que les ponts ayant $n - \beta + 1$ paliers;
 (γ) les ponts de degré γ sont aussi nombreux que les ponts de hauteur γ .

Notre objet est de définir une bijection particulière ω de l'ensemble P_n des ponts de portée n dans lui-même, et de montrer que (α) , (β) et (γ) s'expliquent aisément par les propriétés de cette bijection. Nous établirons en outre que cette dernière transforme l'une dans l'autre deux opérations sur les ponts, la dérivation et la compression. Auparavant, nous préciserons les définitions et la terminologie nécessaires.

1.2. Les ponts se rencontrent dans la littérature sous différentes définitions équivalentes. Dans ce qui suit, nous adopterons la définition que voici: un pont P de portée n est une suite de $2n$ lettres a ou b , comprenant n lettres a et n lettres b , et telle que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ le i ème b n'apparaisse jamais avant le i ème a .

EXAMPLE. $n = 16$:

$$P = aabbaaaaaabbbaabbbbaabbaabbbbaabb.$$

21
54
54
432
32
321
21

La représentation géométrique d'un pont est fournie par un chemin du plan cartésien usuel, joignant le point $(0,0)$ au point (n,n) , et composé de n étapes sud-nord ou ascendantes (étapes a) et de n étapes ouest-est (étapes b), toutes de longueur unité et se succédant dans l'ordre défini par P ; la définition de P implique que ce chemin est situé tout entier à l'intérieur ou sur la frontière du triangle formé par l'axe Oy , la droite $y = n$ et la diagonale $y = x$ (Figure 1).

Le pont P sera assimilé à sa représentation géométrique, ce qui rend en particulier naturelles les conventions de langage suivantes:

- (i) *Arche*: partie d'un pont comprise entre deux points successifs situés sur la diagonale (chaque arche a une portée entière positive; la portée du pont est la somme des portées de ses arches).
- (ii) *Saut*: succession maximale d'étapes a .
- (iii) *Palier*: succession maximale d'étapes b .

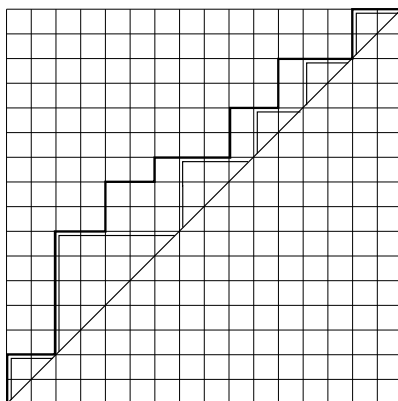


FIGURE 1. Portée: 16, 3 archers et 7 paliers.

(iv) *Virage à droite*: occurrence de ab .

(v) *Virage à gauche*: occurrence de ba .

Nous utiliserons également le mot *étage* avec la signification particulière que voici: un étage est formé d'un palier et de son prolongement jusqu'à la diagonale, y compris le point sur cette dernière.

1.3. Il est commode de coder les ponts à l'aide de n symboles (au lieu de $2n$). On peut pour cela associer à chacun des b un entier égal au nombre des a qui le précèdent diminué du nombre de b qui le précèdent; la suite des ces entiers constitue le *code* du pont. Dans l'exemple ci-dessus le code de P est: 2 1 5 4 5 4 4 3 2 3 2 3 2 1 2 1.

D'une façon générale le code d'un pont se notera $k_1 k_2 \dots k_n$. Dans la départ de la $j^{\text{ème}}$ étape b . Le plus grand de ces entiers est par définition la hauteur du pont.

Il est toujours immédiat de revenir du code d'un pont à ce pont lui-même.

Nous appellerons par définition *type* d'un pont de hauteur γ , la suite $t_1 t_2 t_3 \dots t_\gamma$, où t_j est le nombre d'occurrences de l'entier j dans le code. Le code est toujours une γ -composition de la portée ($t_j \geq 1$, $t_1 + t_2 + \dots + t_\gamma = n$).

Le terme t_1 est le nombre d'arches.

Le pont P de l'exemple ci-dessus a pour type 3 5 3 3 2.

1.4. LEMME. *Le code d'un pont est déterminé sans ambiguïté si l'on en connaît le type et chacune des sous-suites S_j de ce code qui se réduisent aux termes égaux à j ou à $j+1$ ($j \in \{1, 2, \dots, \gamma-1\}$).*

En effet si l'on a déterminé la sous-suite du code des termes égaux à $1, 2, \dots, j$, on ne peut y intercaler des termes $j+1$ qu'à des emplacements précédant immédiatement des termes j , or l'ensemble de ces emplacements est déterminé par la connaissance de S_j . On peut ainsi, de proche en proche à partir de S_1 , déterminer ce code tout entier.

1.5. REMARQUES. 1.5.1. L'ensemble P_n des ponts de portée n possède une structure de treillis pour la relation d'ordre partiel définie par la comparaison terme à terme des codes. Le pont minimal est $abab \dots ab = (ab)^n$, qui a pour code $111 \dots 1 = 1^n$, pour type n et pour hauteur 1. Le pont maximal est $aaa \dots abbb \dots b = a^n b^n$, qui a pour code $n, n-1, \dots, 2, 1$ pour type $111 \dots 1 = 1^n$ et pour hauteur n .

1.5.2. Parmi les ponts de P_n , on peut convenir d'appeler purs ceux dont chaque arche de portée p peut s'écrire $a^p b^p$. Sur un pont pur, tous les virages à gauche sont

situés sur la diagonale. (En particulier les ponts extrêmes $(ab)^n$ et $a^n b^n$ sont tous les deux purs.) Etant donné $P \in P_n$, nous appellerons support de P et nous noterons P^* le plus grand pont pur majoré par P ; sur la Figure 1, P apparaît en traits gras et P^* en traits fins.

2. DERIVATION

2.1. DÉFINITION. La dérivation des ponts a été définie dans [1] avec utilisation, à titre auxiliaire, de la notion d'éventail de segments, dont nous ne nous servirons pas ici.

Nous partirons de la définition équivalente que voici.

Etant donné dans P_n un pont P ayant β paliers, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, \beta - 1\}$ il y a après le $j^{\text{ème}}$ palier au moins un saut (et éventuellement plusieurs) dont l'abscisse est inférieure ou égale à l'ordonnée de ce palier. Appelons k'_j le nombre de ces sauts. On peut aussi définir k'_j comme le nombre de virages à gauche dont la projetante sur Ox rencontre l'étage du $j^{\text{ème}}$ palier. Il est aisé de s'assurer que la suite $k'_1 k'_2 \dots k'_{\beta-1}$ peut être prise comme code d'un pont appartenant à $P_{\beta-1}$; ce pont sera appelé par définition le dérivé de P , et sera noté $D(P)$ ou P' .

2.2. EXEMPLE:

code de P : 2 1 5 4 5 4 4 3 2 3 2 3 2 1 2 1;

code de P' : 1 2 2 1 1 1.

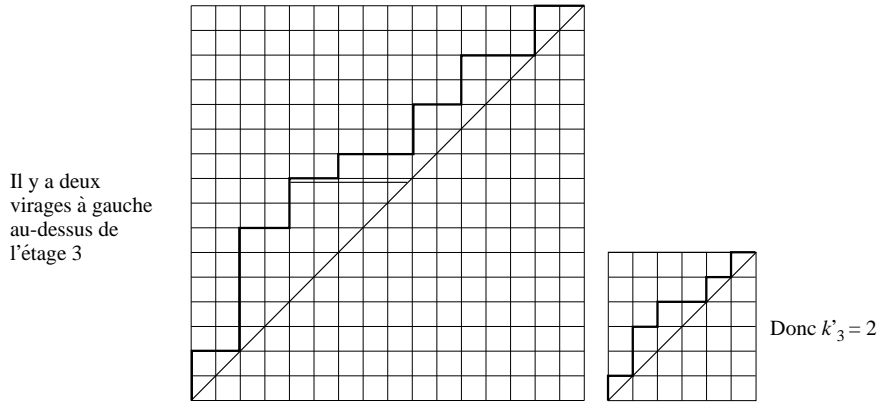


FIGURE 2

Ce pont a 7 paliers ($\beta - 1 = 6$).

Abscisses des sauts: (0), 2, 4, 6, 9, 11, 14.

1 ^{er} palier: ordonnée	2,	$k'_1 = 1$, saut d'abscisse	2
2 ^{ème}	7,	$k'_2 = 2$,	4 et 6
3 ^{ème}	9,	$k'_3 = 2$,	6 et 9
4 ^{ème}	10,	$k'_4 = 1$,	9
5 ^{ème}	12,	$k'_5 = 1$,	11
6 ^{ème}	14,	$k'_6 = 1$,	14

Le pont dérivé de P a pour code 1 2 2 1 1 1:

$$D(P) = P' = a b a a b a b b a b a b.$$

2.3. PROPRIÉTÉS. La portée du pont dérivé de P étant égale au nombre de virages à gauche de P , on voit que la dérivation diminue la portée d'au moins une unité (d'une seule si et seulement si P est le pont minimal). Le pont maximal d'une portée donnée, et lui seul, a pour dérivé le 'pont vide'.

On s'assure aisément:

- (i) que la $j^{\text{ème}}$ arche du support de $D(P)$ a pour portée le nombre de virages à gauche de P , situés au-dessus de la $j^{\text{ème}}$ arche de son support P^* ;
- (ii) que le degré d'un pont, qui était défini dans [1] comme le nombre de dérivations successives nécessaires pour passer de ce pont au pont vide, diminue bien d'une unité par dérivation; le degré, d'un pont P se définit ici comme le nombre d'arches de son support P^* .

3. COMPRESSION

La notion de compression d'un pont a été introduite par Poupard en [2].

Etant donné un pont Q , son comprimé $C(Q)$ s'obtient en soulignant dans Q toutes les occurrences de ab puis en raccordant tout ce qui n'est pas souligné.

EXEMPLE. $n = 16$:

$$\begin{aligned} Q &= \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \in P_{16}, \\ C(Q) &= \underline{a} \underline{a} \underline{a} \underline{a} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \underline{b} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \in P_6, \\ \text{code de } Q &: 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ 5 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1, \\ \text{code de } C(Q) &: 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1. \end{aligned}$$

On s'assure aisément que pour écrire le code de $c(Q)$ il suffit de réécrire, dans l'ordre, ceux des entiers (soulignés dans l'exemple ci-dessus) qui dans le code de Q sont précédés de l'entier immédiatement supérieur. Il en résulte notamment que la compression diminue la hauteur d'une unité.

4. BIJECTION ω

Définissons de la manière suivante la bijection $\omega: P_n \rightarrow P_n$.

Partant de $P \in P_n$, on construit d'abord le support P^* , de même portée, qui se compose de γ arches. Dans la représentation géométrique, on peut appeler A_j l'extrémité de la première étape b de la $j^{\text{ème}}$ arche de P^* . Les γ points A_j et les étapes qui y aboutissent sont communs à P et P^* ; de plus P et P^* coïncident complètement avant A_1 et après A_γ (Figure 1).

Pour définir $\omega(P)$, on forme son code en définissant d'abord les sous-suites S_j de celui-ci qui se réduisent aux termes égaux à j et $j+1$, puis en appliquant le Lemme 1.4. Pour déterminer S_j , on examine le tronçon de P compris entre A_j et A_{j+1} et l'on fait correspondre un terme $j+1$ à chaque a et un terme j à chaque b .

Le type $(t_1 t_2 \cdots t_\gamma)$ du pont $\omega(P)$ ainsi construit n'est autre que la suite des portées des arches de P^* ; $\omega(P)$ a donc bien même portée que P . La construction est réversible. En effet si l'on se donne $Q \in P_n$, la connaissance de son type permet de déterminer les points $A_1 A_2 \cdots A_\gamma$ du support P^* , et la connaissance des sous-suites S_j du code de Q permet de déterminer les tronçons $A_j A_{j+1}$ de P lui-même, donc P tout entier.

ω est donc bien une bijection de P_n dans lui-même; on peut la considérer comme définie sur l'ensemble de tous les ponts, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$.

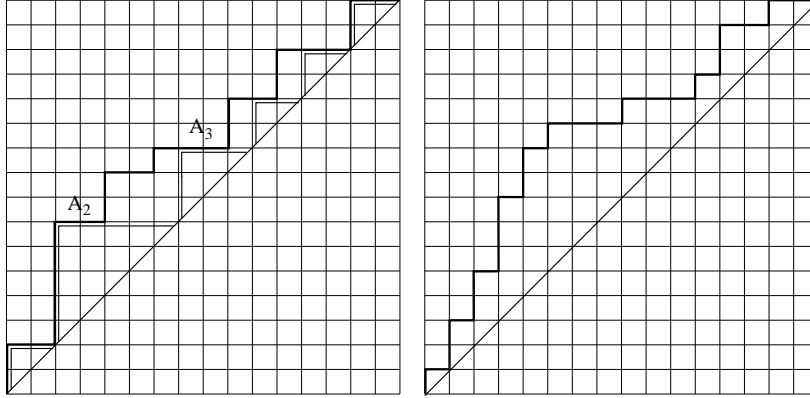


FIGURE 3

Il est trivial de vérifier que, pour $n \geq 2$, ω transforme l'un dans l'autre le pont $a^n b^n$ et le pont $(ab)^n$; cependant dès que $n \geq 2$, ω n'est pas une involution.

EXEMPLE:

code de P : 2 1 5 4 5 4 4 3 2 3 2 3 2 1 2 1,

Code de $Q = \omega(P)$: 1 2 3 5 6 6 5 4 4 3 2 2 3 2 2 1;

entre A_2 et A_3 , on a la séquence $b a a b b a b b$;
d'où dans l'image la succession: 2 3 3 2 2 3 2 2 .

Tronçons	Étapes de P	S_j du code de $\omega(P)$
$A_1 A_2$	$b a a a a b$	1 2 2 2 2 1
$A_2 A_3$	$b a a b b a b b$	2 3 3 2 2 3 2 2
$A_3 A_4$	$b a a b b$	3 4 4 3 3
$A_4 A_5$	$a a b b$	5 5 4 4
$A_5 A_6$	$b a a b$	5 6 6 5

Pour le code de $\omega(P)$, on a de proche en proche:

$$\{1, 2\} \rightarrow 1 2'' 2 2' 2 2 1$$

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow 1 2 3'' 3 2 2 3 2 2 1$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow 1 2 3'' 4 4 3 2 2 3 2 2 1$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow 1 2 3 5'' 5 4 4 3 2 2 3 2 2 1$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow 1 2 3 5 6 6 5 4 4 3 2 2 3 2 2 1$$

5. PROPRIÉTÉS

Sur le pont P ci-dessus, il est facile de vérifier les trois propriétés générales qui vont être établies:

(α) Si P commence par α étapes a , $\omega(P)$ possède α arches.

(β) Si $P \in P_n$ possède β paliers, $\omega(P)$ possède $n - \beta + 1$ paliers.

(γ) Si P est de degré γ , $\omega(P)$ est de hauteur γ .

De ces trois énoncés résultent immédiatement les trois énoncés désignés par les mêmes lettres en 1.1.

5.1. Le nombre d'arches de $\omega(P)$ est égal au nombre de termes 1 dans le code de $\omega(P)$; c'est donc par construction le nombre d'étapes b de P entre A_1 et A_2 . Or ce nombre n'est autre que la portée de la première arche du support P^* de P , donc aussi le nombre de a avant le premier b de P . La bijection ω transforme ainsi tout pont qui commence par $a^\alpha b \cdots$ en un pont ayant α arches.

5.2. Le nombre d'occurrences de $j+1$ suivi de j dans le code de $\omega(P)$ est égal, par construction, au nombre d'occurrences de ab entre A_j et A_{j+1} . Si P possède au total β paliers, tous sauf le premier correspondent, dans le code de $\omega(P)$, à l'occurrence d'un entier suivi de l'entier immédiatement inférieur; donc dans le pont $\omega(P)$ lui-même, dans l'occurrence de bb , c'est-à-dire d'un b immédiatement précédé d'un autre b . Il y a alors, dans $\omega(P)$, $n - (\beta - 1)$ occurrences d'un b précédé d'un a , donc finalement $n - \beta + 1$ paliers. La bijection ω transforme un pont de portée n à β paliers en un pont à $n - \beta + 1$ paliers.

5.3. Le degré γ de P est le nombre d'arches de son support P^* . La construction du code de $\omega(P)$ entraîne que le plus grand entier présent dans ce code est précisément γ . γ est donc la hauteur de $\omega(P)$. La bijection ω transforme tout pont de degré γ en un pont de hauteur γ .

6. THEOREME

THEOREME. *La bijection ω transforme les dérivations en compressions.*

Cet énoncé signifie que, quel que soit le pont P , on a toujours $C(\omega(P)) = \omega(D(P))$, ce que nous noterons $C(Q) = \omega(P')$; ou encore que le diagramme ci-dessous est commutatif:

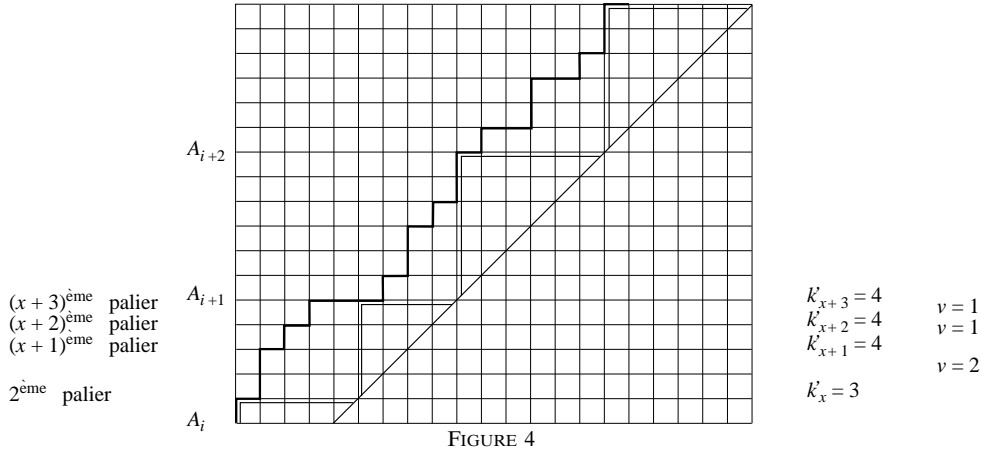
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\omega} & \\ D \downarrow & & \downarrow C \\ & \xrightarrow{\omega} & \end{array}$$

Pour l'établir, on comparera, dans les codes des deux ponts $\omega(P')$ et $C(Q)$, le nombre (éventuellement nul) de termes $i+1$ qui apparaissent entre le $(j-1)^{\text{ème}}$ et le $j^{\text{ème}}$ terme i (avant le premier i si $j=1$). Si on appelle ce nombre u pour $\omega(P')$ et v pour $C(Q)$, il s'agit de montrer que $u = v$.

6.1. Par suite de la définition de ω , u n'est autre que le nombre d'étapes a qui se placent, dans P' , entre la $(j-1)^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ des étapes b du tronçon $A'_i A'_{i+1}$ (les points A'_i se définissent à partir du support de P' comme les points A_i se définissaient à partir du support de P). Si A'_i a pour abscisse x , ce nombre n'est autre que l'accroissement d'ordonnée de P' à l'abscisse $x+j-1$, c'est-à-dire $k'_{x+j} - k'_{x+j-1} + 1$ (où la suite des k' désigne le code de P'). Ainsi $u = k'_{x+j} - k'_{x+j-1} + 1$.

6.2. Le code de $C(Q)$ est la partie soulignée du code de Q , comme dans l'exemple du 3.

Le nombre v est ainsi le nombre d'occurrences de $(i+2, i+1)$ entre la $(j-1)^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ occurrence de $(i+1, i)$ dans le code de $Q = \omega(P)$. Or aux occurrences de



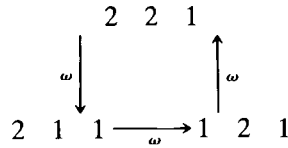
$(i+2, i+1)$ correspondent des virages à droite dans le tronçon $A_{i+1}A_{i+2}$ de P , virages dont chacun a pour abscisse celle du saut qui le précède. De même aux occurrences de $(i+1, i)$ dans le code de Q , correspondent des virages à droite dans le tronçon A_iA_{i+1} de P , dont chacun a pour ordonnée celle du palier qui le suit. Il en résulte que v est le nombre de sauts de P dont l'abscisse est inférieure ou égale à l'ordonnée du $j^{\text{ème}}$ palier, mais supérieure à celle du $(j-1)^{\text{ème}}$ palier. Avec l'aide de la Figure 4, il est facile de voir que ce nombre résulte de la comparaison de deux termes consécutifs du code de P' ; plus précisément, si A_i est sur le $x^{\text{ème}}$ palier de P , on a:

$$v = k'_{x+j} - k'_{x+j-1} + 1.$$

Le théorème est donc démontré.

7. CYCLES

7.1. Il résulte de la propriété (β) que les ponts successifs d'un cycle de ω possèdent alternativement β et $n - \beta + 1$ paliers; les cycles définis par ω sur P_n sont donc en général de longueur paire. Cette propriété ne peut être en défaut que si n est impair et $\beta = (n+1)/2$: c'est ce qui arrive par exemple pour $n=3$ et $\beta=2$ (Figure 4 ci-dessous, ponts désignés par leur codes)



Le caractère exceptionnel des cycles de longueur impaire, rend intéressante l'étude de la bijection itérée ω^2 , qui conserve l'ensemble $P_{n,\beta}$ des ponts de portée n ayant β paliers. Il apparaît que la structure cyclique de ω^2 sur $P_{n,\beta}$ ne se présente pas d'une manière très simple, même sur $P_{n,2}$ qui a pour cardinal $n(n+1)/2$.

Il est cependant assez facile d'établir le résultat suivant: les seuls points fixes possibles de ω^2 sur $P_{n,2}$ se présentent pour $n = 4k - 2$, et pour k entier positif donné, il y a un point fixe et un seul, qui est le pont de code $2k-1, 2k-2, \dots, k, 3k-2, 3k-3, \dots, 2, 1$. Le pont de $P_{4k-2,4k-3}$ qui lui correspond par ω a pour code $1^{k-1}2^{2k-1}1^k$.

D'autres points fixes de ω^2 peuvent apparaître sur $P_{n,\beta}$, pour $2 < \beta < n-1$; par exemple:

$$3244321 \xleftrightarrow[\omega]{\omega} 1222121$$

7.2. Si n est impair et $\beta = (n + 1)/2$, la bijection ω elle-même peut avoir un point fixe. C'est le cas pour les ponts suivants:

$$\begin{array}{ccc} n = 5, & \beta = 3 & n = 7, & \beta = 4 & n = 13, & \beta = 7 \\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1 & & 2\ 4\ 3\ 2\ 2\ 1\ 1 & & 2\ 3\ 5\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1 \end{array}$$

Le recensement des ponts possédant cette propriété demeure un problème ouvert.

REFERENCES

1. G. Kreweras, Sur les éventails de segments, *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, Cahier no. 15*, Paris, 1970, pp. 3–41.
2. Y. Poupard, Sur les quasi-ponts, *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, Cahier no. 32*, Paris, 1979, pp. 3–20.

Received 29 January 1996 and accepted 28 February 1996

J. VAILLÉ

I.S.A.B.,

Département Mathématiques et Systèmes d'Informations,

32 Boulevard du Port,

95094 Cergy-Pontoise Cedex, France